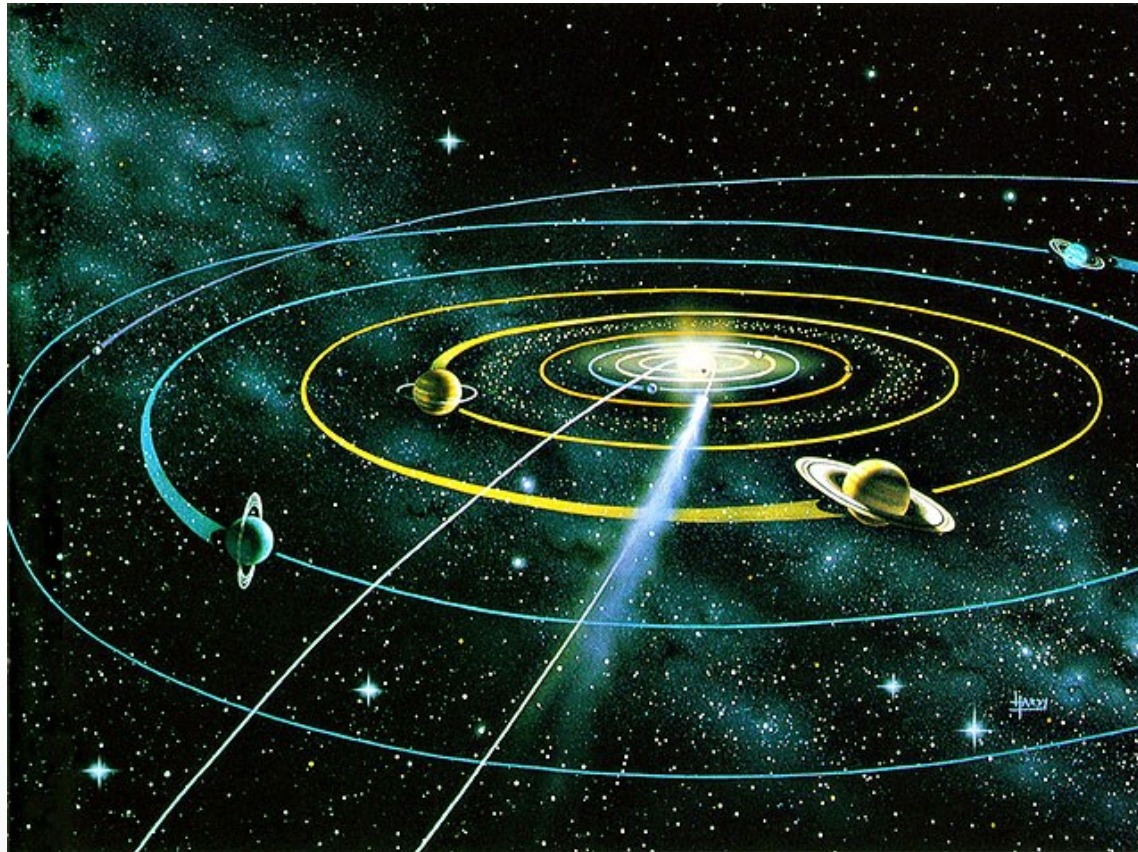


Τροχιές σωμάτων σε πεδίο Βαρύτητας



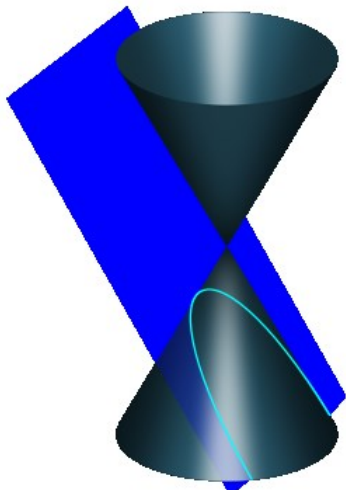
Κωνικές Τομές

- Είναι καμπύλες που σχηματίζονται καθώς επίπεδα τέμνουν με διάφορες γωνίες επιφάνειες κώνων.

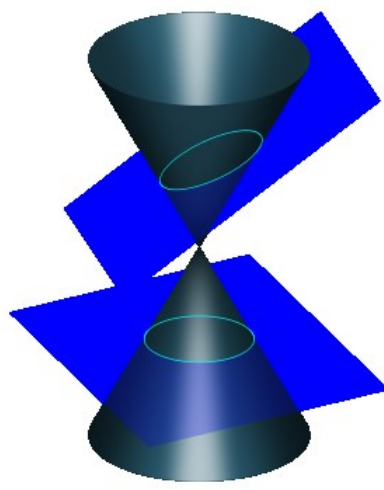
Παραβολή

Έλλειψη -κύκλος

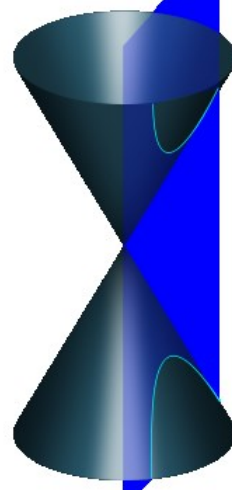
Υπερβολή



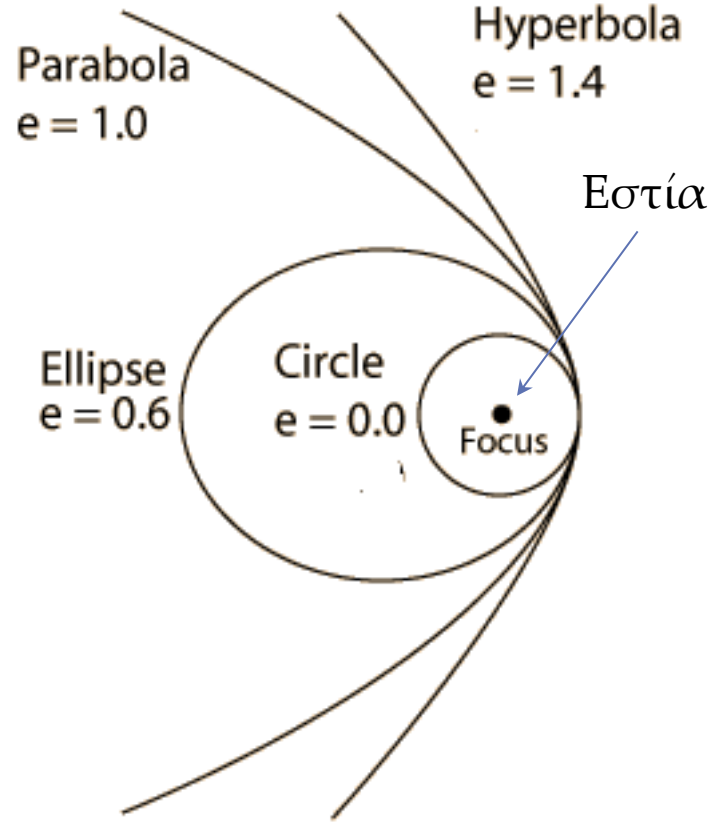
①



②



③



$$e = \sqrt{1 - k \frac{b^2}{a^2}}$$

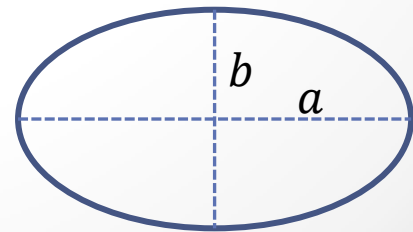
a : μήκος του μεγάλου ημιάξονα

b : μήκος του μικρού ημιάξονα

Έλλειψη : $k=+1$, $0 < e < 1$

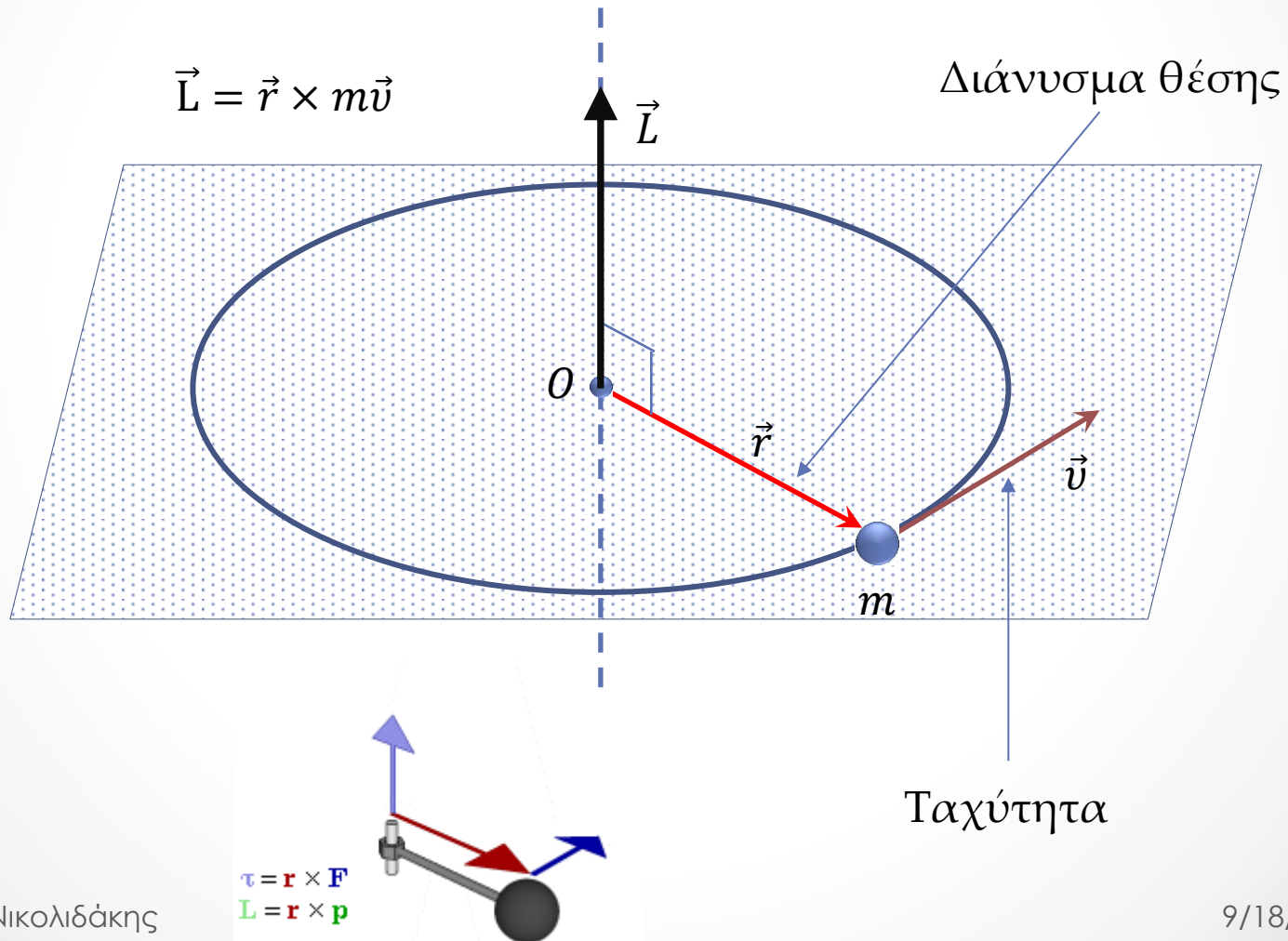
Παραβολή : $k=0$, $e=0$

Υπερβολή : $k=-1$, $e > 1$



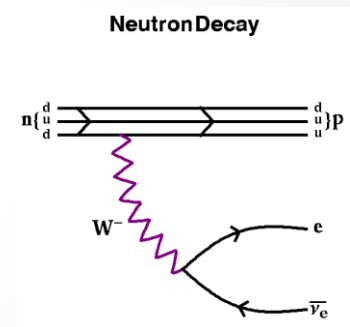
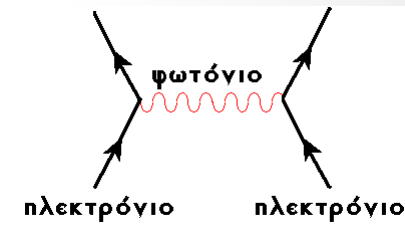
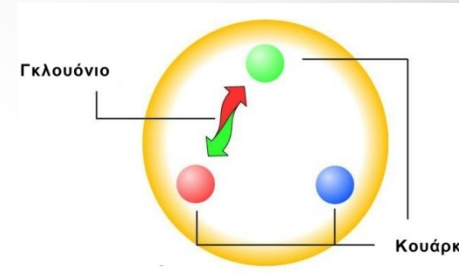
Στροφορμή

- Η στροφορμή (στροφή+ορμή) είναι σαν φυσικό μέγεθος ένα διάνυσμα που απαιτεί τη γνώση τόσο του μέτρου της όσο και της διεύθυνσης και φοράς της, προκειμένου να γίνει περιγραφή της.
- Το μέτρο της στροφορμής L λόγω της περιφοράς ενός σώματος είναι το γινόμενο (εξωτερικό) του διανύσματος θέσης \vec{r} επί την ορμή του ($m\vec{v}$)
- ως ιδιότητα που χαρακτηρίζει γενικά τα περιστρεφόμενα σώματα και παριστάνει την αδράνεια ως προς την κίνηση ενός σώματος ή συστήματος σωμάτων γύρω από ένα άξονα.



Θεμελιώδεις δυνάμεις

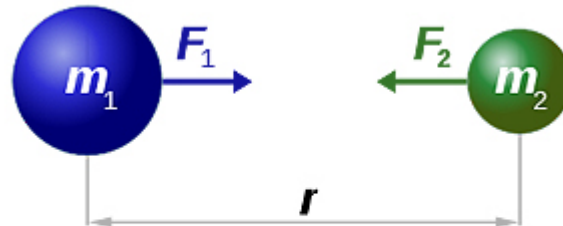
- Όλες οι δυνάμεις που συναντούμε στην φύση μπορούν να ερμηνευθούν με την επίκληση 4 θεμελιωδών δυνάμεων
- **Ισχυρή**
 - Έχει μικρή εμβέλεια (1-2 fm $\approx 10^{-15}$ m) και είναι υπεύθυνη για τον σχηματισμό των πυρήνων των ατόμων, σχετική ισχύς 1
 - Οι φορείς της ισχυρής αλληλεπίδρασης είναι τα Γλοιόνια (Gluons)
- **Ηλεκτρομαγνητική**
 - Εμβέλεια ∞ είναι υπεύθυνη για τον σχηματισμό ατόμων και μορίων σχετική ισχύς 1/137
 - Φορείς της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης είναι τα φωτόνια που θεωρούνται χωρίς μάζα ηρεμίας.
- **Ασθενής Πυρηνική**
 - Εμβέλεια 10^{-15} m είναι υπεύθυνη για την ραδιενεργή διάσπαση και έχει σχετική ισχύ 10^{-9}
 - Φορείς της ασθενούς αλληλεπίδρασης είναι τα μποζόνια W^+ , W^- , Z^0
- **Βαρύτητα**
 - Εμβέλεια ∞ σχετική ισχύς 10^{-38}
 - Φορείς θεωρούνται τα γκραβιτόνια (δεν έχουν ακόμη ανακαλυφθεί)



Βαρύτητα

- Νευτώνεια Φυσική

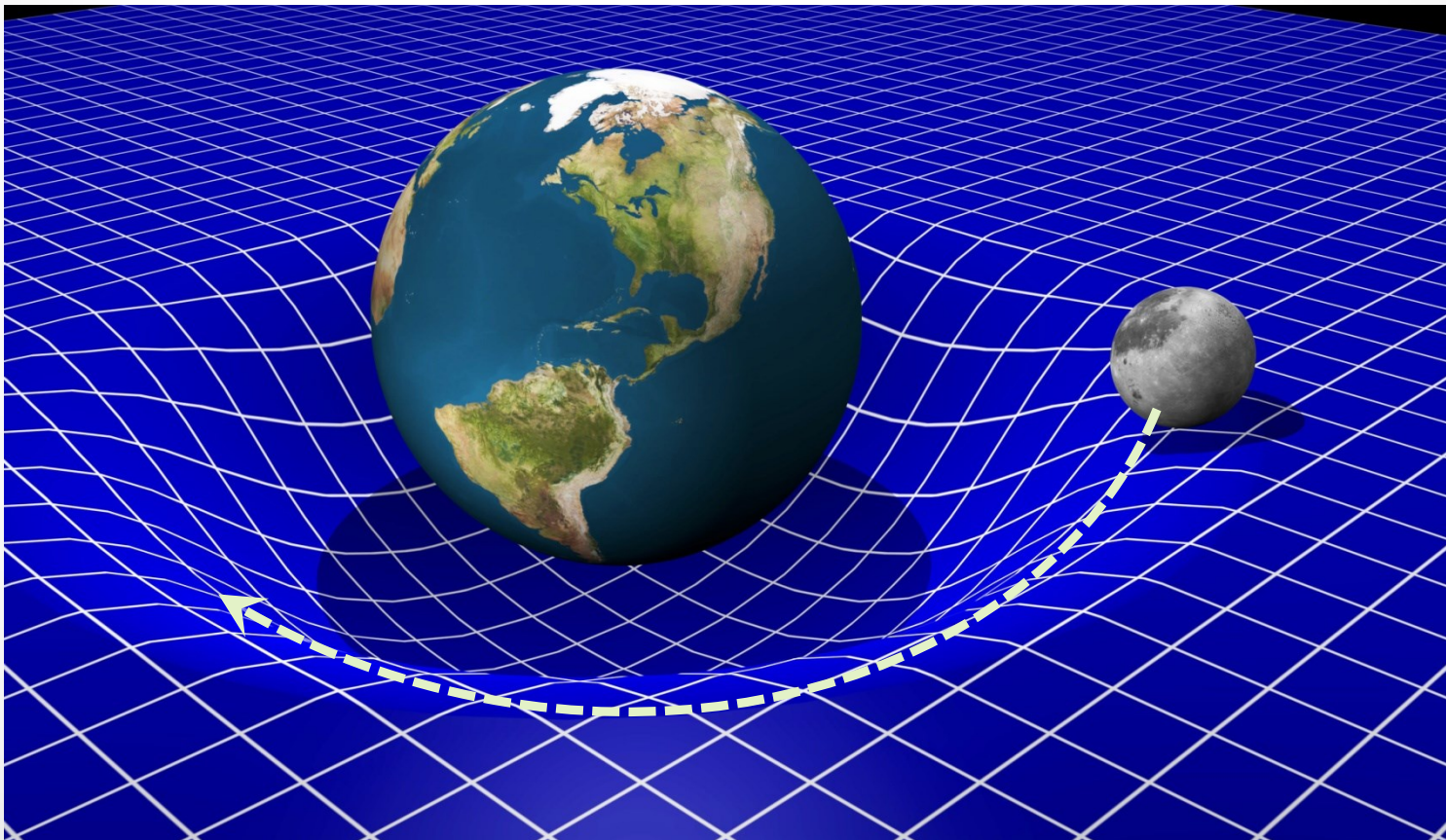
- Δύναμη που οφείλεται στην παρουσία της μάζας και μεταδίδεται ακαριαία μεταξύ των σωμάτων
- Επομένως πηγή της δύναμης της βαρύτητας είναι η μάζα , από το νόμο της παγκόσμιας έλξης (εμπειρικός) σε συνδυασμό με την Νευτώνεια Μηχανική καταλήγουμε σε συμπεράσματα για τις τροχιές των σωμάτων που κινούνται σε πεδία βαρύτητας (δίνει ορθές προβλέψεις στα όριά της δηλαδή σε όχι πολύ μεγάλες ταχύτητες και όχι πολύ μεγάλες μάζες)

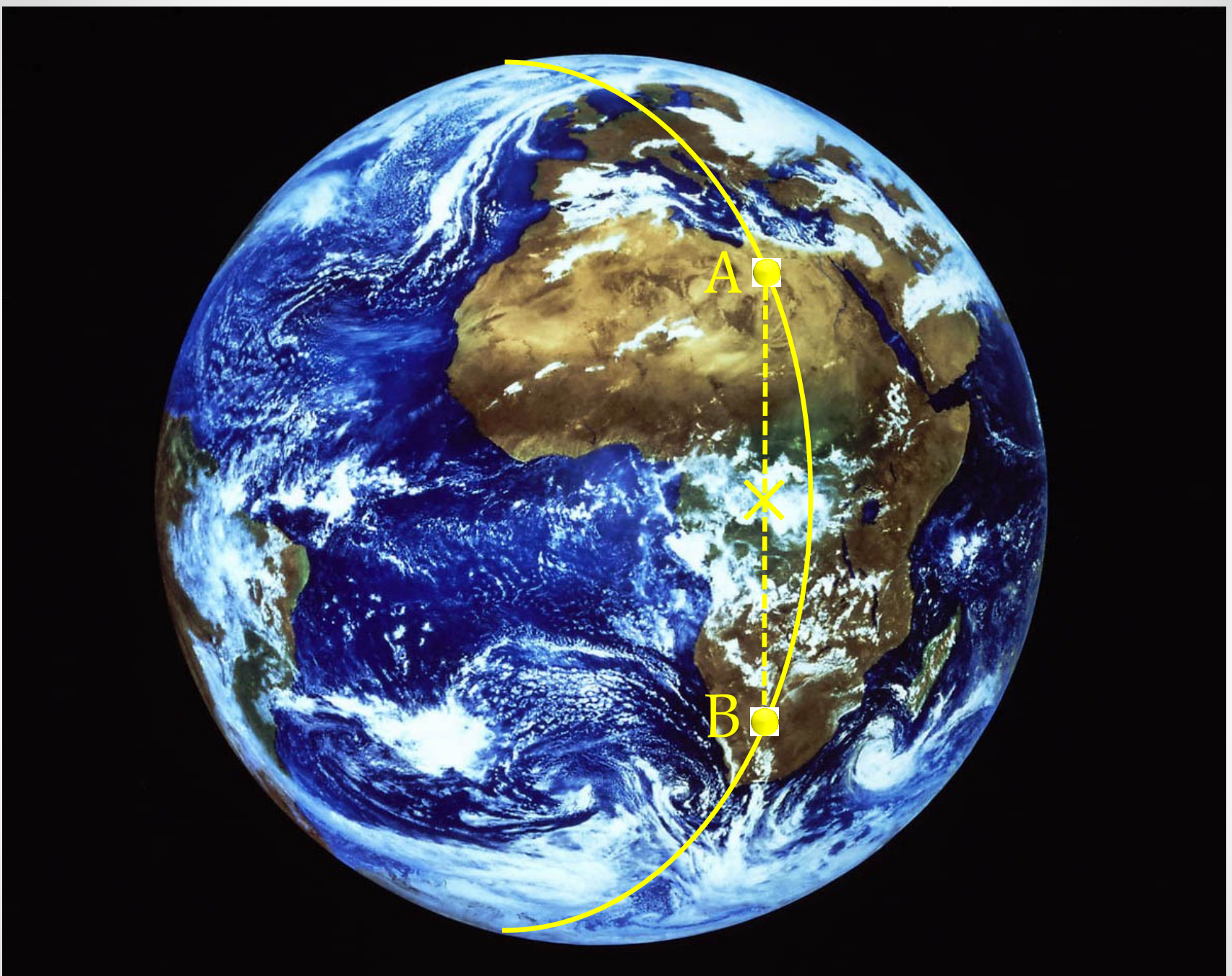


$$F_1 = F_2 = G \frac{m_1 \times m_2}{r^2}$$

Βαρύτητα

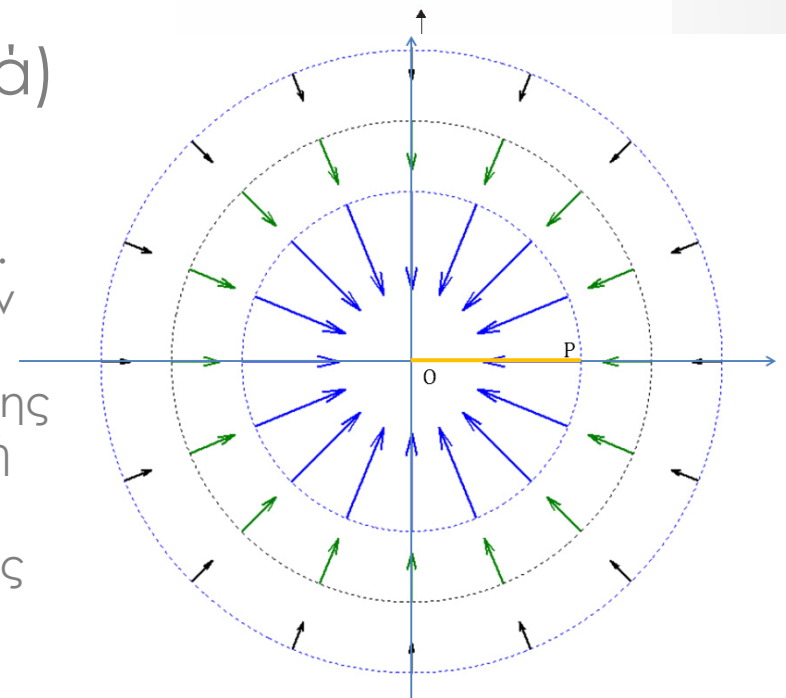
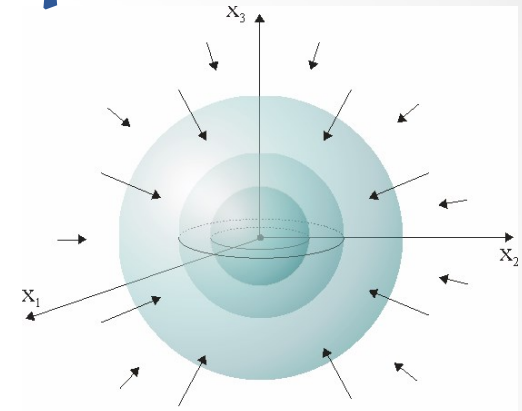
- Γενική σχετικότητα
 - Δεν αντιμετωπίζει την βαρύτητα σαν δύναμη αλλά σαν **ιδιότητα** του χωροχρόνου
 - Ο χωροχρόνος **καμπυλώνεται** με την παρουσία της μάζας.
 - Σαν συνέπεια τα σώματα ακολουθούν γεωδαισιακές τροχιές. Δηλαδή τροχιές που στην καμπύλη γεωμετρία είναι οι τροχιές με το μικρότερο μήκος.





Πεδία Βαρύτητας

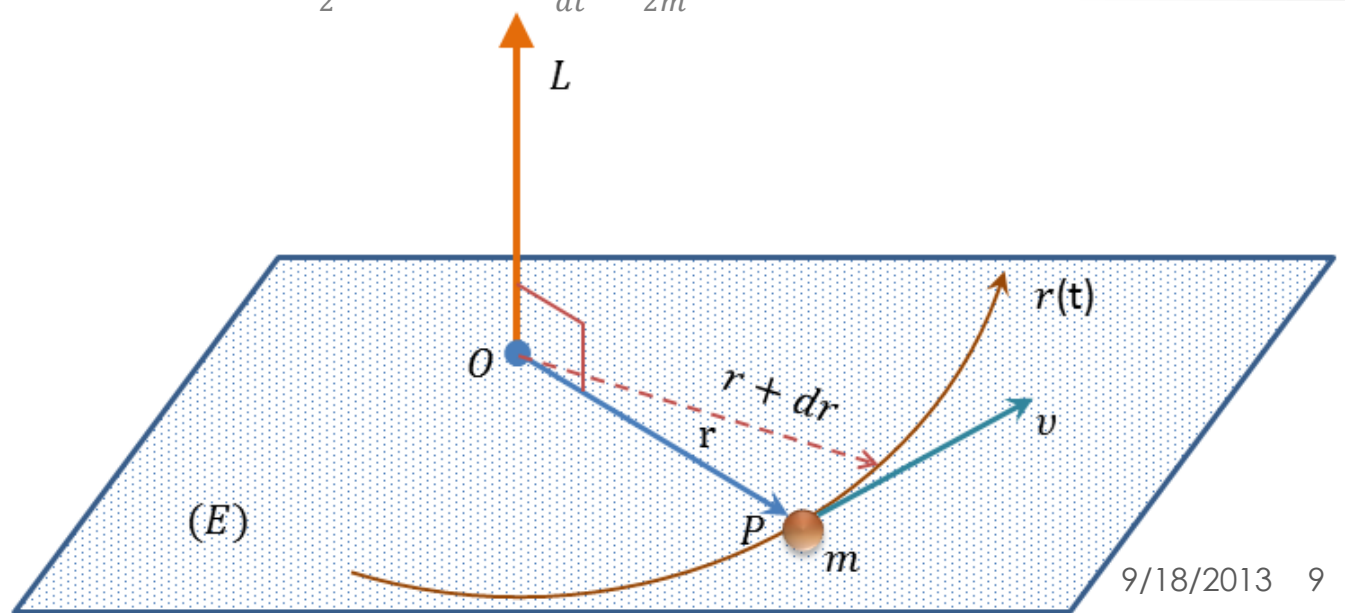
- Είναι κεντρικά
 - Οι φορείς των δυνάμεων, συντρέχουν σε ένα κοινό σημείο, το κέντρο του πεδίου. Δηλαδή εάν O είναι το κέντρο της δύναμης τότε σε οποιαδήποτε σημείο P του χώρου η δύναμη $\vec{F} = F(r)\hat{e}_r$ όπου \hat{e}_r είναι το διάνυσμα που κείται στο OP
- Είναι συντηρητικά (διατηρητικά)
 - Συντηρητικό ονομάζεται ένα πεδίο δυνάμεων όταν οι δυνάμεις που εμφανίζονται σ' αυτό είναι συντηρητικές. Συντηρητική ονομάζεται μια δύναμη όταν το έργο της για οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή είναι μηδέν ή αλλιώς το έργο της δύναμης εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση
 - Συνέπεια : ο στροβιλισμός είναι μηδενικός $\nabla \times F = 0$



Κίνηση σε κεντρικό Δυναμικό

- Στροφορμή

- Είναι ένα διάνυσμα (\mathbf{L}) κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν το διάνυσμα θέσης και το διάνυσμα της ταχύτητας (ορμής)
- Αποδεικνύεται ότι η Στροφορμή σε κεντρικά πεδία είναι σταθερό διάνυσμα.
- $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{L}}{dt} = m \frac{dr}{dt} \times v + mr \times \frac{dv}{dt} = mv \times v + r \times ma = 0 + r \times F = 0$ αφού $r \parallel F$
- Συμπέρασμα : Η τροχιά του σώματος σε πεδίο κεντρικών δυνάμεων γίνεται σε ένα **επίπεδο** το οποίο είναι σταθερό σε όλη τη διάρκεια της κίνησης περνά από το κέντρο των δυνάμεων. Ο και μπορεί να βρεθεί αν ξέρουμε τα **αρχικά διανύσματα** θέσης r_0 και αρχικής ταχύτητας v_0
- Η επιβατική ακτίνα του σώματος σε ίσους χρόνους θα σαρώνει ίσες επιφάνειες (Δεύτερος νόμος Κέπλερ) $\Delta A = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| \Delta t \Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$

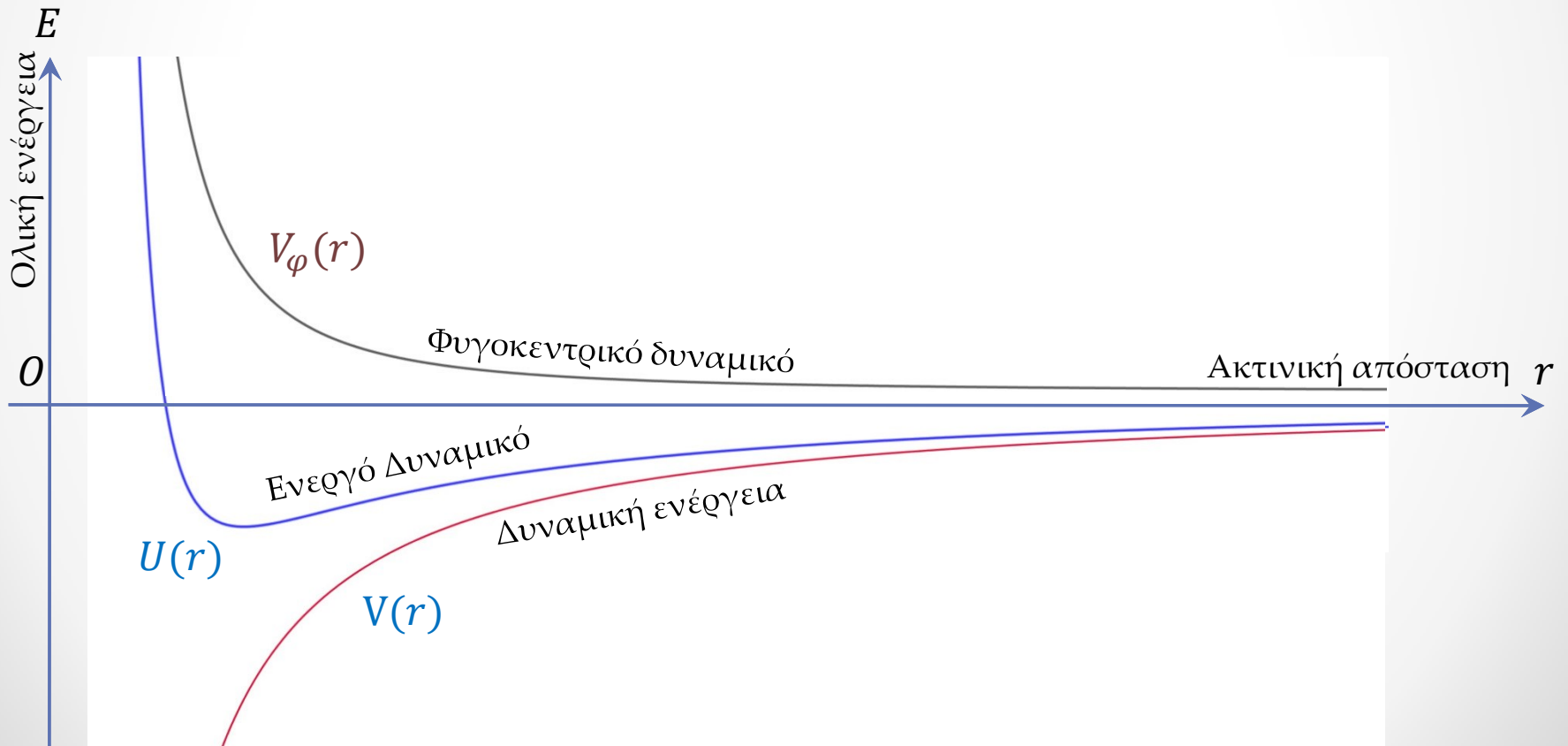


Κίνηση σε κεντρικό Δυναμικό

- Δύναμη
 - Ασκείται από την μάζα M στην μάζα m και αποδεικνύεται ότι είναι σύμφωνη με τον νόμο της παγκόσμιας βαρυτικής έλξης του Νεύτωνα
 - $\vec{F} = -G \frac{Mm}{r^2} \vec{e}_r$ Πρόκειται για κεντρική ελκτική δύναμη
 - Ως διατηρητική προέρχεται από δυναμικό και μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει μιας δυναμικής συνάρτησης $V(r)$, $F(r) = -\frac{dV(r)}{dr}$
- Ενεργός δυναμική ενέργεια (Effective potential)
 - Καθορίζει το είδος της τροχιάς
 - Η συνάρτηση της ενεργούς δυναμικής ενέργειας της μάζας είναι :
 - $U(r) = V(r) + V_\phi(r) = -G \frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$
 - Είναι συνάρτηση **δύο** παραγόντων της συνάρτησης **δυναμικής ενέργειας** $V(r)$ και της **φυγοκεντρικής δυναμικής ενέργειας** $V_\phi(r)$
 - Το φυγοκεντρικό δυναμικό οφείλεται στην περιστροφή του ζεύγους, απειρίζεται σε μικρές αποστάσεις και είναι αυτό που **εμποδίζει** τα σώματα να πέσουν πάνω στο άλλο.
 - Εξαίρεση $\left(V(r) \xrightarrow{r \rightarrow 0} -\frac{k^2}{r^{2+\varepsilon}}, \varepsilon > 0 \right)$

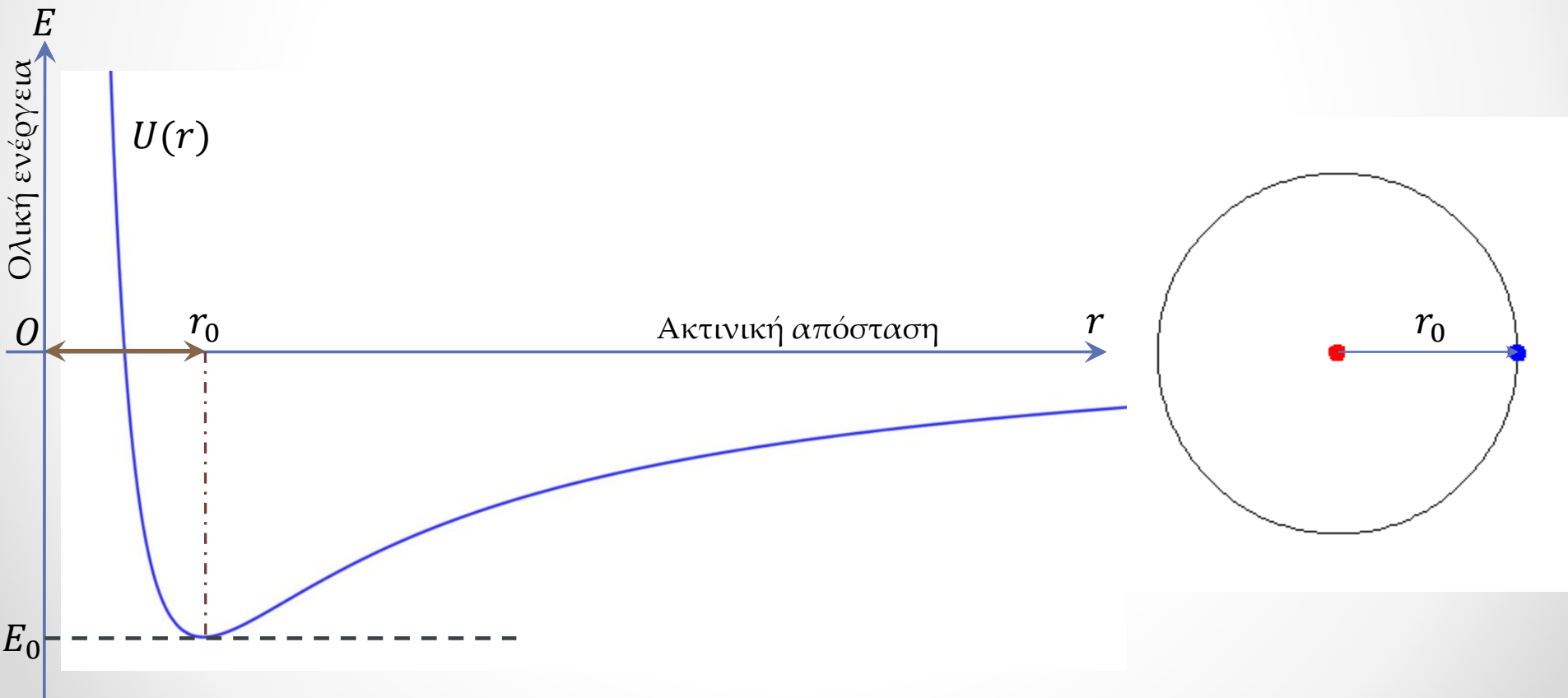
Κίνηση σε κεντρικό Δυναμικό

- Ολική ενέργεια $E = \frac{1}{2}mv^2 + U(r) \Rightarrow E - U(r) = \frac{1}{2}mv^2 > 0$
 - Άρα η κίνηση επιτρέπεται μόνο σε περιοχές όπου $E > U(r)$
- $U(r) = V(r) + V_\varphi(r) = -G\frac{Mm}{r} + \frac{L^2}{2mr^2}$
- Εκκεντρότητα $e = \sqrt{1 + \frac{2EL^2}{mk^2}}$, $k = -GMm$



Διερεύνηση

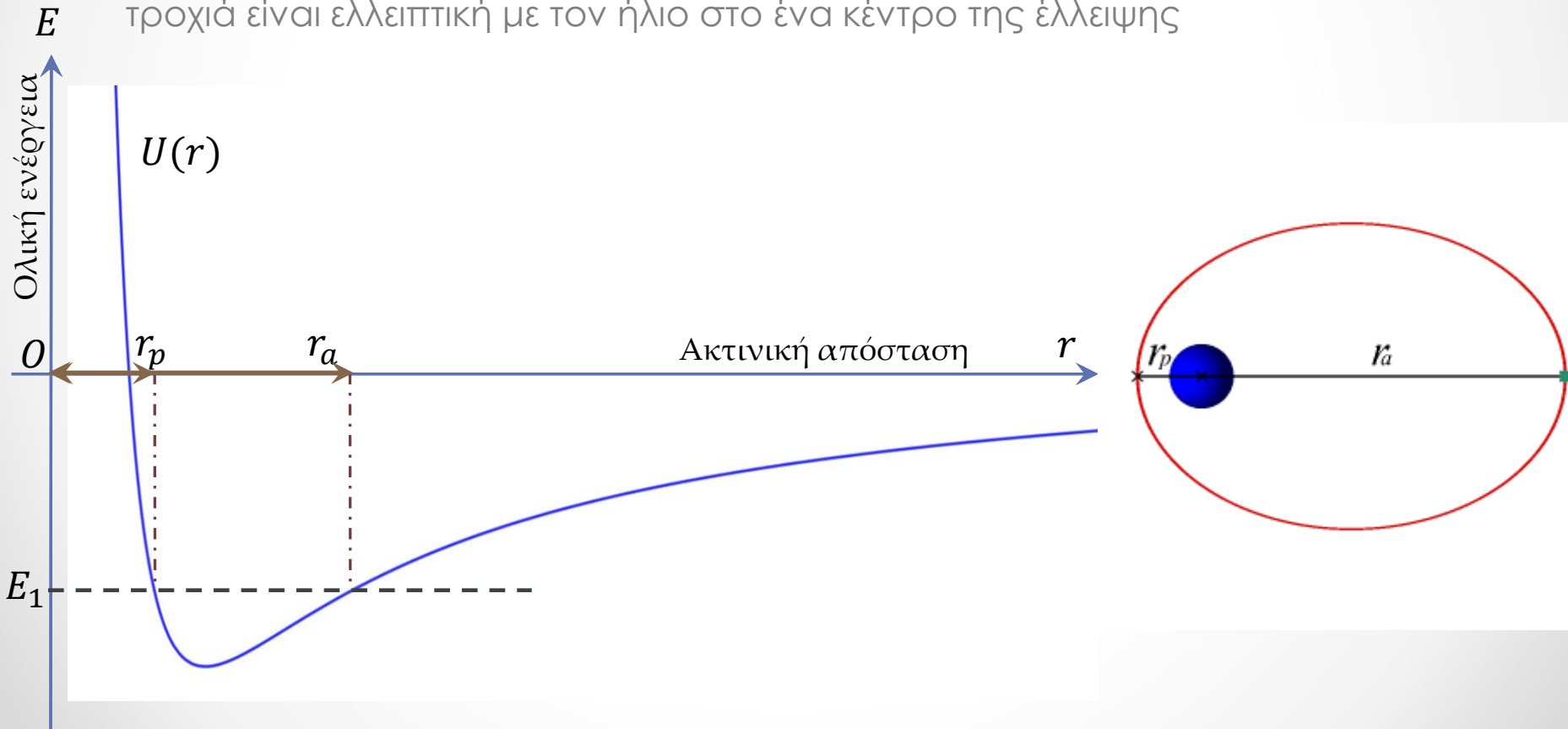
- Για $E = U_{\min}$
 - Η κίνηση είναι επιτρεπτή και σε αυτή την περίπτωση $r = r_0$ και η ακτινική ταχύτητα $\dot{r}=0$ όπως επίσης το διάνυσμα της στροφορμής $L=$ σταθερό $\neq 0$, εκκεντρότητα $e = 0$, επομένως η τροχιά της μάζας m είναι κύκλος με ακτίνα r_0 .



Διερεύνηση

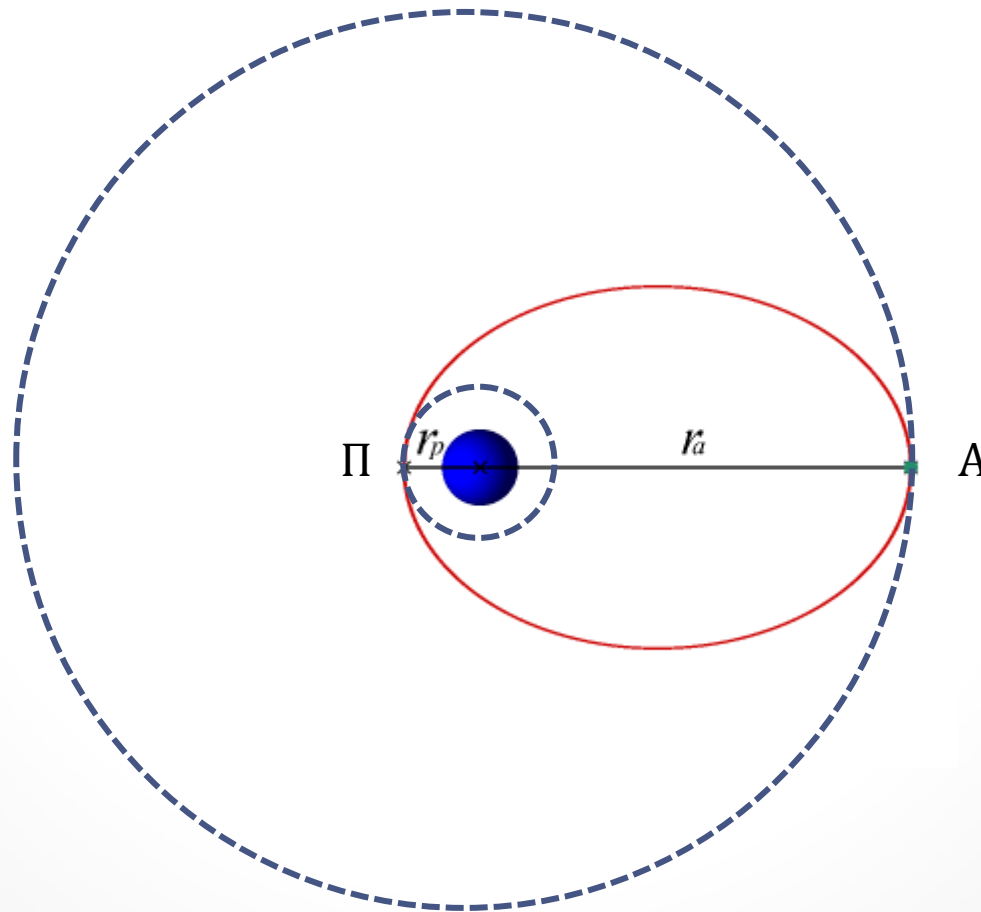
- $U_{\min} < E < 0$

- σε αυτή την περίπτωση όπως φαίνεται στο η οριζόντια ευθεία E_1 τέμνει την $U(r)$ σε δύο σημεία r_p, r_a και η εξίσωση $U(r) = E$ έχει δύο λύσεις, τις αποστάσεις r_p, r_a αυτό σημαίνει ότι η τροχιά της μάζας m μπορεί να κινηθεί μεταξύ των ακτινικών αποστάσεων $r_p \leq r \leq r_a$ έτσι ώστε να ικανοποιείται η $E \geq U(r)$
- Από τον τύπο της εκκεντρότητας και με δεδομένο ότι $E < 0$ προκύπτει ότι $e < 1$ και η τροχιά είναι ελλειπτική με τον ήλιο στο ένα κέντρο της έλλειψης



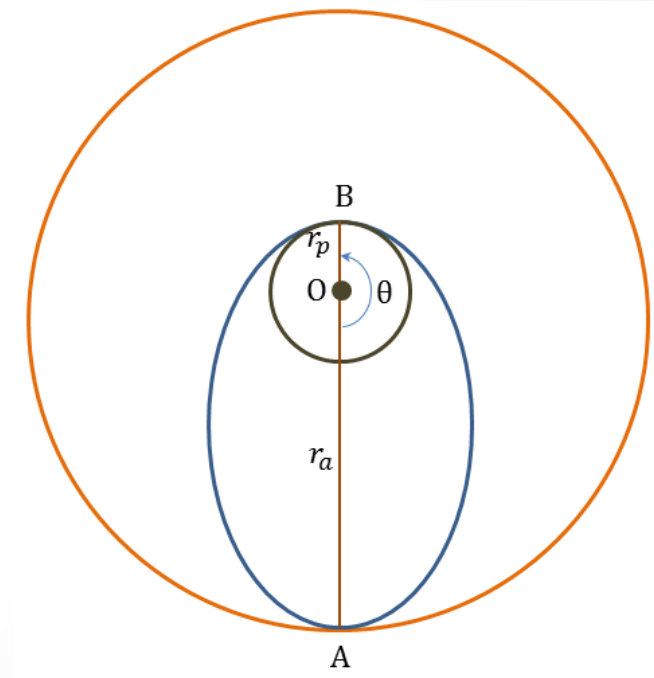
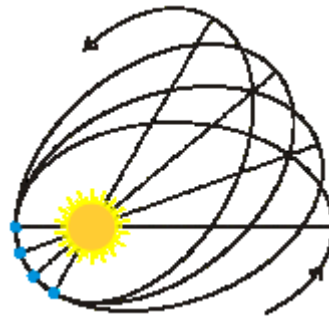
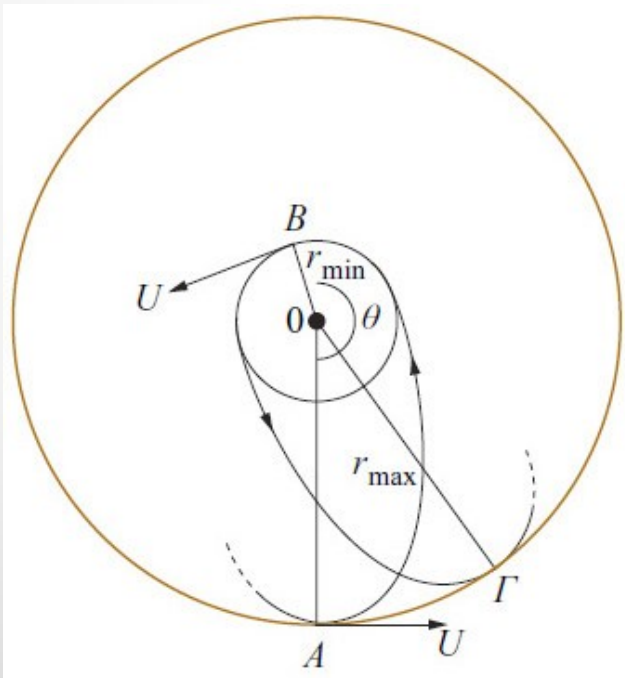
Διερεύνηση

- $U_{\min} < E < 0$
 - Στο περιήλιο η τροχιά της έλλειψης εφάπτεται εξωτερικά της περιφέρειας του κύκλου $r = r_p$ και στο αφήλιο εφάπτεται εσωτερικά του κύκλου $r = r_a$



Διερεύνηση

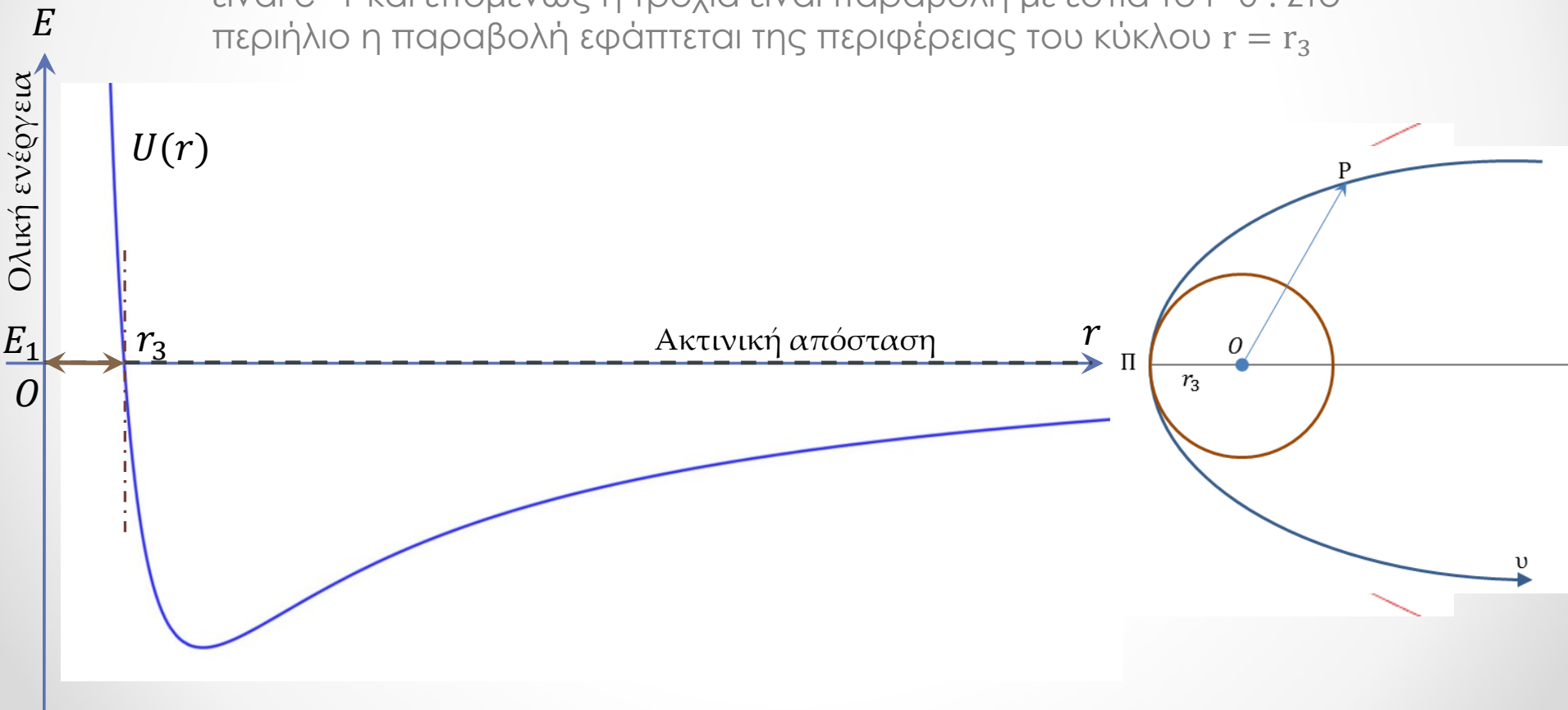
- $U_{\min} < E < 0$
- Τα σημεία επαφής ονομάζονται αψίδες (A,B,Γ), η γραμμή που συνδέει μια αψίδα με το ελκτικό κέντρο O ονομάζεται γραμμή των αψίδων (OA,OB,ΟΓ). Στις αψίδες η ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας μηδενίζεται , υπάρχει περιστροφή των αψίδων σε κάθε τροχιά και η γωνία $\theta = \angle AOB$ ονομάζεται γωνία των αψίδων, η γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών γραμμών των αψίδων είναι σταθερή.
- Στην περίπτωση ελκτικών κεντρικών δυνάμεων όπου η δύναμη είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της ακτινικής απόστασης r η γωνία $\theta = \pi$ δηλαδή σε τέτοια πεδία δυνάμεων όπως και το πεδίο του ηλιακού μας συστήματος δεν υπάρχει περιστροφή των αψίδων.
- (e Γής από 0.034-0.058)



Διερεύνηση

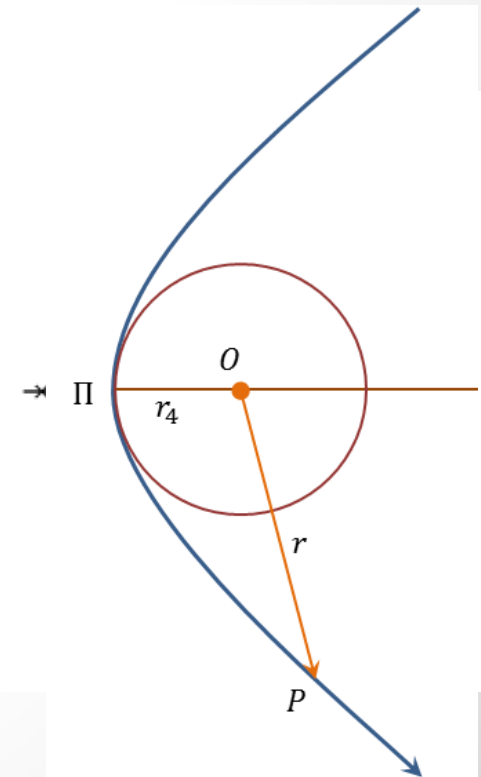
- $E = 0$

- ο η ενέργεια τέμνει την εξίσωση $U(r)$ σε ένα σημείο το r_3 και ασυμπτωματικά στο άπειρο, η εξίσωση $U(r) = E = 0$ έχει σαν λύση την απόσταση r_3 και η τροχιά της μάζας περιορίζεται εξωτερικά του κύκλου $r = r_3$. Η εκκεντρότητα είναι $e=1$ και επομένως η τροχιά είναι παραβολή με εστία το $r=0$. Στο περιήλιο η παραβολή εφάπτεται της περιφέρειας του κύκλου $r = r_3$



Διερεύνηση

- $E > 0$
 - Η οριζόντια ευθεία τέμνει την εξίσωση $U(r)$ σε ένα σημείο το r_4 , η εξίσωση $U(r) = E$ έχει σαν λύση την απόσταση r_4 και η τροχιά της μάζας περιορίζεται εξωτερικά του κύκλου $r = r_4$. Η εκκεντρότητα είναι $e > 1$ και η τροχιά είναι υπερβολή με εστία το $r=0$. Στο περιήλιο η υπερβολή εφάπτεται της περιφέρειας του κύκλου $r = r_4$.



Προσομοίωση

- <http://astro.unl.edu/naap/pos/animations/kepler.swf>
- http://phet.colorado.edu/sims/my-solar-system/my-solar-system_en.html
- <http://faculty.ifmo.ru/butikov/Projects/Collection1.html>

Τροχιές σωμάτων σε πεδίο Βαρύτητας

Γιώργος Νικολιδάκης

<http://geonik.homeip.net>

nikoligeo@gmail.com

14/9/2013

